ریاضی۳

نکته (۱): فرمول شعاع بازه به صورت $\text{شعاع} = \dfrac{\text{ابتدای بازه} - \text{انتهای بازه}}{۲}$

فرمول مرکز بازه به صورت $\text{مرکز} = \dfrac{\text{ابتدای بازه} + \text{انتهای بازه}}{۲}$

مثال ۱: مرکز و شعاع بازه (۸ و ۲-) را بدست آورید.

جواب: $\text{شعاع} = \dfrac{۸-(-۲)}{۲} = \dfrac{۱۰}{۲} = ۵$ $\qquad \text{مرکز} = \dfrac{۸+(-۲)}{۲} = \dfrac{۶}{۲} = ۳$

مثال ۲: اگر مرکز بازه (۳m و m) برابر ۳ باشد شعاع بازه (m+۲ و m-۲) کدام است؟

جواب: $\dfrac{۳m+m}{۲} = ۳ \Rightarrow \dfrac{۴m}{۲} = ۳ \Rightarrow ۴m = ۶ \Rightarrow m = \dfrac{۳}{۲}$

با گذاشتن $m = \dfrac{۳}{۲}$ بازه به صورت $(-\dfrac{۱}{۲}, \dfrac{۷}{۲})$ در می‌آید. $\text{شعاع} = \dfrac{\dfrac{۷}{۲} - (-\dfrac{۱}{۲})}{۲} = \dfrac{۴}{۲} = ۲$

تست(۱):اگر $A = [-۱,۵)$ و $B = (-۲,۳]$ باشد مرکز بازه $A \cap B$ و شعاع بازده $A \cup B$ به ترتیب کدام است؟

الف) ۲ و ۱۰   ب) ۱ و ۲   ج)۱ و $\dfrac{۷}{۲}$ ✓   د)۳ و ۲

جواب: گزینه (ج) $\qquad A \cap B = [-۱,۳] \rightarrow \text{مرکز} = \dfrac{۳+(-۱)}{۲} = \dfrac{۲}{۲} = ۱$

$$A \cup B = (-۲,۵) \rightarrow \text{شعاع} = \dfrac{۵-(-۲)}{۲} = \dfrac{۷}{۲}$$

نکته (۲): جواب نامعادلات زیر را با هم مقایسه کنید.

الف) $x^۲ < ۹ \rightarrow -۳ < x < ۳$

ج) $x^۲ < -۹ \rightarrow x = \phi$

د) $x^۲ > -۹ \rightarrow x = R$

هـ) $x^۲ = ۹ \rightarrow x = \pm ۳$

و) $|x| < ۳ \rightarrow -۳ < x < ۳$

ر) $|x| > ۳ \rightarrow x < -۳, x > ۳$

تست(۲): نامعادله $x^۲ - ۴ \leq ۰$ به ازای چند عدد طبیعی برقرار است؟

الف) ۲ ✓   ب) ۳   ج)۴   د) ۵

جواب: گزینه (الف) $\qquad x^۲ - ۴ \leq ۰ \rightarrow x \leq ۴ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲$

اعداد طبیعی واقع در بازه = $\{۱,۲\}$

✍ نکته (۳): دامنه تابع Sin x و Cos x همیشه برابر R است مگر اینکه این توابع به صورت کسری یا رادیکال باشند که در این صورت Sin و Cos را حذف کرده و دامنه رادیکال و کسر را بدست می‌آوریم.

می‌دانید دامنه تابع کسری برابر { ریشه‌های مخرج کسر } - R و دامنه توابع رادیکال برابر ۰ ≤ عبارت زیر رادیکال می‌باشد.

✎ **مثال ۱:** دامنه تابع $y = Sin۵x$ را بدست آورید؟

جواب: $D_y = R$

☜تست (۳): دامنه تابع $y = Cos\frac{۱}{x}$ کدام است؟

الف) R ب) x=۰ ج) $x \neq ۰$ ✓ د) $x > ۰$

جواب: دامنه تابع کسری برابر ریشه‌های مخرج کسر R می‌باشد. $R - \{۰\} \Rightarrow x \neq ۰$

✍ نکته (٤): دامنه $y = tgx$ و $y = \cot gx$ را با هم مقایسه کنید هرگاه x ضریب داشته باشد ملاحظه کنید که چطور دامنه‌ها را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم.

الف) $y = tgx \to D_y \Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$

ب) $y = \cot gx \to D_y \Rightarrow x \neq k\pi$

ج) $y = tg۵x \to D_y \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۱۰}$

د) $y = ۷\cot g۳x \to D_y \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{۳}$

همانطور که ملاحظه می‌کنید ضریب اول tgx یا cotgx مهم نیست.

☜تست (٤): دامنه تابع $t = \tan ۲x$ کدام است؟ (سراسری ۷۶)

الف) $x \neq k\pi$ ب) $x \neq \frac{k\pi}{۲}$ ج) $x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}$ د) $x \neq \frac{k\pi}{۲} + \frac{k\pi}{۴}$ ✓

جواب: گزینه (د)، ضریب x عدد ۲ می‌باشد دامنه tgx را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.

✍ نکته (۵): چند دامنه زیر را بخاطر بسپارید.

الف) $y = \frac{۳x + ۱}{|x| - x}$

$|x|=x \Rightarrow x=$ اعداد مثبت $D_y = R-$(اعداد مثبت) = اعداد منفی جواب $x<0$ یا $(\infty,0)$

ب) $y=\dfrac{3x+1}{[x]-x}$

$[x]-x=0 \Rightarrow [x]=x \Rightarrow x=$ اعداد صحیح $D_y = R-Z$

ج) $y=\dfrac{3x+1}{[x]-2}$

$[x]-2=0 \Rightarrow [x]=2 \Rightarrow 2\le x<3 \Rightarrow D_y=R-[2,3]$

د) $y=\dfrac{3x+1}{[x]+2}$

$[x]+2=0 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow -2\le x<-1 \Rightarrow D_y=R-[-2,-1)$

هـ) $y=\sqrt{4-x^2}$

$x^2-4\ge 0 \Rightarrow x^2\ge 4 \Rightarrow x\le -2 , x\ge 2$

تست (۵): دامنه تابع $y=\dfrac{x+1}{[x]+1}$ کدام است؟

الف) $[0,+\infty]$ ب) $(-\infty,-1)$ ج) $(-\infty,1)\cup[0,+\infty)$ ✓ د) $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$

جواب: گزینه (ج)، می‌دانیم دامنه توابع کسری برابر {ریشه‌های مخرج کسر} − R می‌باشد. ابتدا ریشه‌های مخرج کسر را بدست می‌آوریم.

$[x]+1=0 \rightarrow [x]=-1 \Rightarrow -1\le x<0 \Rightarrow D_y=R-[-1,0) \Rightarrow (-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

نکته (٦): هرگاه در عبارتی ۲ تا رادیکال یا دو تا عبارت داشته باشیم بهتر آن است که دامنه هر کدام را به تنهایی حساب کرده و از دامنه آن دو اشتراک بگیریم.

مثال ۱: دامنه تابع $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-x^2}}$ را بدست آورید؟

جواب:

دامنه صورت $x-1\ge 0 \quad x\ge 1$

دامنه مخرج $4-x^2>0 \quad -x^2>-4 \rightarrow x^2<4 \rightarrow -2<x<2$

$\rightarrow \quad (-2,2)\cap[1,+\infty)=[1,2]$

همانطور که می‌بینید عبارت زیر رادیکال اگر رادیکالی مال مخرج باشد نباید مساوی داشته باشد فقط بزرگتر از صفر قرار می‌دهیم.

تست (۶): دامنه تابع $f(x)=\sqrt{x}+\frac{۱}{[x]-۱}$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

الف) $(۰,+\infty)$　　ب) $[۲,+\infty)$　　ج) $[۰,۱)\cup[۲,+\infty)$ ✓　　د) $[۰,۱]\cup(۱,+\infty)$

جواب: $\sqrt{x}$ **دامنه** $\rightarrow x\geq ۰$

$$\frac{۱}{[x]-۱}\rightarrow [x]-۱=۰\Rightarrow [x]=۱\rightarrow ۱\leq x<۲ \qquad \text{دامنه}=R-[۱,۲)=(-\infty,۱)\cup[۲,+\infty)$$

سپس اشتراک دامنه $\sqrt{x}$ و دامنه $\frac{۱}{[x]-۱}$ را روی محور بدست می‌آوریم. گزینه (ج)، $[۰,۱)\cup[۲,+\infty)$

نکته (۷): مولفه‌های اول زوج مرتب دامنه آن مولفه های دوم زوج مرتب برد آن به حساب می‌آیند.

اگر جای مولفه‌های اول و دوم را با هم عوض کنیم تابع معکوس F بدست می‌آید.

مثال ۱: مجموع عضوهای دامنه وارون تابع $F=[\{(۱,۲),(۳,۴),(۵,۶)\}]$ کدام است؟

جواب: ابتدا تابع $F^{-۱}$ را می‌نویسیم.

$$F^{-۱}=\{(۲,۱),(۴,۳),(۶,۵)\}$$

۱۲ = ۶ + ۴ + ۲ جواب

مثال ۲: به یک مثال دیگر خوب توجه کنید: اگر $F=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۷)\}$ و $g=\{(۴,۲),(۵,۳),(۷,۱)\}$ باشند مطلوبست محاسبه $Fog(x)$ و $goF(x)$؟

جواب:

$Fog(x)$: g → F

g	F
(۲ و ۴)	(۴ و ۲)
(۳ و ۵)	(۳ و ۲)
(۱ و ۷)	(۷ و ۳)

$goF(x)$: F → g

F	g
(۴ و ۱) →	(۲ و ۴)
(۳ و ۲)	(۳ و ۵)
(۷ و ۳) →	(۱ و ۷)

$$goF(x)=\{(۱,۲),(۳,۱)\}$$

$$Fog(x)=\{(۴,۳),(۷,۴),(۵,۷)\}$$

این مثال مهم است خوب بخاطر بسپارید.

ابتدا جای F و g را عوض می‌کنیم و بعد از مرتب نوشتن زوج مرتب‌ها، زیر هم اعداد یکسان را به هم وصل می‌کنیم.

تست (۷): دو تابع به صورت زیر تعریف شده‌اند مجموع عضوهای دامنه $Fog(x)$ کدام است؟ (سراسری ۸۴)

الف) صفر　　ب) ۱ ✓　　ج) ۸　　د) ۱۵

جواب: $Fog(x)=\{(۲,-۲),(۰,۴),(-۱,۱)\}$

g F

$۲+۰+(-۱)=۱$

g	F
$(۲,۱)$	$(۱,-۲)$
$(۱,۲)$	$(۳,۴)$
$(۰,۳)$	$(۴,۱)$
$(-۱,۴)$	$(۰,۲)$
$(-۲,۵)$	

نکته (۸): منظور از F(۲) یعنی در تابع F(x) به جای x ها مقدار ۲ قرار دهید. منظور از $F(g(x))$ یعنی در تابع $F_{(x)}$ به جـای x مقدار g(x) قرار دهید.

تست(۸): اگر $F(x)=x+\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{۲x}{x+۹}$ باشد. مقدار $g(F(۴))$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

الف) ۰/۶ ب) ۰/۷۵ ج) ۰/۸ د) ۱/۲۵

جواب: در حل اینگونه تست‌ها ابتدا باید عبارت $F(۴)$ را پیدا کنید. منظور از $F(۴)$ یعنی در $F(x)$ به جای x ها مقدار ۴ قرار دهید.

$$g(F_{(۴)})=g(۶)=\frac{۲(۶)}{۶+۹}=\frac{۱۲}{۱۵}=۰/۸$$

نکته (۹): در زوج مرتب‌ها نیز دقت کنید. اگر $F=\{(۱,۲),(۲,۵)\}$ باشد $F(۱)=۲$ و $F(۲)=۵$ می‌باشد.

تست(۹):دو تابع $F=\{(۲,۳),(۳,۵),(۴,۱),(۷,۲)\}$ و $g=\{(۱,۹),(۳,۷),(۴,۳)\}$ را در نظر بگیرید مفروض است:

$$Fog(۳)+F(۴)\times g(۴)$$

الف) ۵ ✓ ب) ۶ ج) ۸ د) ۹

جواب: منظور از $F(۴)$ یعنی ۱ و از منظور $g(۴)$ یعنی ۳ و مقدار $Fog_{(۳)}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$Fog(۳)=F(g(۳))=F(۷)=۲\Rightarrow ۲+(۱\times ۳)=۵$$

نکته (۱۰): عملیات روی زوج مرتب‌ها به این صورت است که عملیات روی زوج مرتب‌هایی امکان دارد که مولفه‌های اول آن‌ها با هم یکسان باشد و بدانید عملیات فقط در مولفه‌های دوم خواهد بود.

تست (۱۰): اگر $F=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۵)\}$ و $g=\{(۱,۸),(۳,۱۵),(۴,۱)\}$ حاصل عبارت زیر کدام است؟ $\frac{g}{F}(x)$

جواب: $\frac{g}{F}(x)=\{(۱,\frac{۸}{۴}),(۳,\frac{۱۵}{۵})\} \Rightarrow \frac{g}{F}(x)=\{(۱,۲),(۳,۳)\}$

نکته (۱۱): هرگاه صحبت بیشترین مقدار و کمترین مقدار باشد یکبار به جای Sinu و Cosu مقدار ۱ و ۱- را قرار می‌دهیم عدد بزرگتر بیشترین مقدار و عدد کوچکتر کمترین مقدار می‌باشد.

مثال ۱: بیشترین و کمترین مقدار $۲-Sin۳x$ کدام است؟

جواب: کمترین مقدار $Sin۳x=۱ \to ۲-۱=۱$

بیشترین مقدار $Sin۳x=-۱ \to ۲-(-۱)=۳$

تست (۱۱): بیشترین مقدار $y=۱+۲Cos۴x$ چقدر است؟

الف) ۳ ✓ ب) ۴ ج) ۸ د) ۹

جواب: بیشترین $\to$ Cos4x = ۱ $\to$ ۱ + ۲ (۱) = ۳

کمترین $\to$ Cos4x = -۱ $\to$ ۱+۲(-۱) = -۱

نکته (۱۲): توابع چند ضابطه‌ای شرط دارند. باید به شرط تابع توجه شود.

مثال ۱: اگر $F(x)=\begin{cases} x^۲+۱ & x\geq ۲ \\ ۲x-۳ & x<۲ \end{cases}$ باشد. حاصل $F(۳)+F(-۳)$ کدام است؟

شرط تابع به ما می‌گوید اگر عدد بزرگتر یا مساوی ۲ باشد از ضابطه $x^۲+۱$ استفاده کنید و اگر از عدد ۲ کوچکتر باشد از ضابطه $۲x-۳$ استفاده کنید.

جواب:

$$F(۳)=۳^۲+۱=۱۰$$
$$F(-۳)=۲(-۳)-۳=-۹$$
$$F(۳)+F(-۳)=۱۰-۹=۱$$

تست (۱۲): اگر $F(x)=\begin{cases} ۲x^۲-x & x\geq ۱ \\ ۲x+۳ & x<۱ \end{cases}$ باشد حاصل عبارت $F(F(-۱))$ کدام است؟

الف) ۱- ب) ۱ ✓ ج) ۲ د) ۲-

جواب: $F(-۱)=۲(-۱)+۳=۱ \Rightarrow F(F(-۱))=F(۱)=۲-۱=۱$

نکته (۱۳): به مثال زیر نگاه کنید.

اگر $F_{(x+۲)} = x^۲ + ۱$ باشد. حاصل F(-۱) کدام است. برای حل اینگونه مثال‌ها باید x + ۲ را برابر ۱- قرار دهیم تا x بدست آید.

سپس به جای xها این مقدار را قرار دهیم.

جواب: $x+۲=-۱ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow F(x+۲)=(-۳^۲)+۱=۱۰$

تست (۱۳): اگر داشته باشیم با $F(x-۱)=x^۲+۲$ باشد مقدار عددی F(-۳) کدام است؟ (سراسری ۷۷)

الف) ۶- ب) ۱۱ ج) ۱۱- د) ۶ ✓

جواب: گزینه (د)

$x-۱=-۳ \Rightarrow x=-۲$

$F(x-۱)=-۲^۲+۲=۶$

نکته (۱۴): انواع حد ۴ تا می‌باشد:

الف) حد هوپیتال ب) حد هم ارزی مثلثاتی ج) حد راست و حد چپ د) حد به سمت ∞

در نکته ۱۴ حد هوپیتال را توضیح می‌دهم.

هرگاه صورت و مخرج کسر صفر شد و حالت $\frac{۰}{۰}$ پیش آمد به این حالت هوپیتال می‌گوییم برای حل اینگونه حدها از صورت و مخرج کسر به تنهایی مشتق می‌گیریم و سپس به جای x مقدار قرار می‌دهیم.

مثال ۱: حاصل حد $\lim_{x\to ۱} \frac{x^۳-x}{x^۳-۵x+۴} = \frac{۰}{۰}$ کدام است؟

جواب: $\lim_{x\to ۰} \frac{۳x^۲-۱}{۲x-۵} = \frac{۳-۱}{۲-۵} = \frac{۲}{-۳}$

تست (۱۴): حاصل $\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳-۸}{x^۲+۲x-۸}$ کدام است؟ (سراسری ۸۲)

الف) ۱- ب) ۱ ج) ۲ ✓ د) ∞

جواب: $\frac{۰}{۰} \Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{۳x^۲}{۲x+۲} = \frac{۱۲}{۶} = ۲$

نکته (۱۵): حد هم ارزی مثلثاتی:

جدول زیر را بخاطر بسپارید

مثلثات	هم ارزی
$Sinu$	u
Tgu	u
$Sin^n u$	u^n
$Tg^n u$	u^n
$Cosu$	۱
$۱-Cosu$	$\frac{۱}{۲}u^۲$

مثال ۱: حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x.Sin۳x}{۱-Cosx}$ کدام است؟

جواب: $\lim\frac{x\times ۳x}{\frac{۱}{۲}x^۲}=\frac{۳x^۲}{\frac{۱}{۲}x^۲}=\frac{۳}{\frac{۱}{۲}}=۶$

مثال ۲: حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{Sin(x-۳)}{x^۳-۹x}$ کدام است؟

جواب: $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x-۳}{x^۳-۹x}=\frac{۰}{۰}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۱}{۳x^۲-۹}=\frac{۱}{۱۸}$

۱۵): حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{Sin(x-۱)}{x^۲+۳x-۴}$ کدام است؟

الف) ۰ $\qquad$ ب) $\frac{۱}{۵}$ ✓ $\qquad$ ج) ۱- $\qquad$ د) $-\frac{۱}{۴}$

جواب: $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{Sin(x-۱)}{x^۲+۳x-۴}=\frac{۰}{۰}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۱}{۲x+۳}=\frac{۱}{۵}$

نکته (۱۶): در مورد حد راست و حد چپ باید بدانید که اولاً ۲/۰۱ = ۲^+ و ۱/۹۹ = ۲^- و جدول زیر را خوب یاد بگیرید.

$[۲^+]=۲$

$[۲^-]=۱$

$[۰^-]=-۱$

$[۰^+]=۰$

$\frac{۱}{۰^-}=-\infty$

$\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$

$\frac{۱}{۰^+}=+\infty$

$\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

$۲-۲^+=۰^-$

$۲^+-۲=۰^+$

$۲^--۲=۰^-$

$۲-۲^-=۰^+$

تست (١٦): حد $\frac{x+[x]}{۲x-|x|}$ وقتی $x\to ۰^-$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $-\infty$ ج) ۱ د) $+\infty$ ✓

جواب: ابتداء تکلیف تابع جزء صحیح x و قدر مطلق را معلوم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{x+[۰^-]}{۲x-x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x-۱}{x}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

نکته (۱۷): در مورد حد به سمت ∞ باید بدانیم:

الف) اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد جواب حد ∞ است.

ب) اگر درجه صورت از مخرج کمتر باشد جواب حد صفر است.

ج) اگر درجه صورت با درجه مخرج با هم برابر باشد جواب حد $\frac{\text{برابر ضریب صورت}}{\text{ضریب مخرج}}$ می‌باشد.

د) در حد به سمت ∞ فقط درجه بزرگتر x را می‌نویسیم.

هـ) اگر حد به سمت $-\infty$ باشد داخل قدر مطلق به صورت منفی بیرون می‌آید.

حال به چند مثال دقت کنید:

مثال ۱: حاصل $\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳+x^۲|x|-۱}{۵x^۳+۲}$ کدام است؟

جواب:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۳+x^۲(-x)}{۵x^۳}=\frac{۲x^۳-x^۳}{۵x^۳}=\frac{x^۳}{۵x^۳}=\frac{۱}{۵}$$

مثال ۲: حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{(x-x^۲)(x^۳+۱)}{(x^۴+۱)۳x-۴)}$ کدام است

جواب:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۲\times x^۳}{x^۴\times ۳x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^۵}{۳x^۵}=\frac{-۱}{۳}$$

تست (۱۷): اگر $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^۲-۴x}{۳x^m+۵x}=\frac{۱}{۶}$ حاصل $a.m$ کدام است؟

الف) $\frac{۱}{۲}$ ب) $\frac{۲}{۳}$ ج) ۱ ✓ د) ۲

جواب: گزینه (ج)، حد به سمت ∞ زمانی جواب عددی دارد که درجه صورت با درجه مخرج با هم برابر باشد. پس m = ۲ و هرگاه درجه صورت با درجه مخرج با هم برابر باشند جواب حد به صورت روبرو خواهد بود. $\text{جواب حد}=\frac{\text{ضریب صورت}}{\text{ضریب مخرج}}$

$\frac{a}{۳}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$ جواب $a\times m=\frac{۱}{۲}\times ۲=۱$

نکته (۱۸): در مورد پیوستگی باید گفت:

الف) هرگاه $\boxed{\text{مقدار تابع = حد چپ = حد راست}}$ گوییم تابع پیوسته است.

ب) هرگاه $\boxed{\text{حد چپ = حد راست}}$ گوئیم تابع حد دارد.

ج) هرگاه $\boxed{\text{حد چپ} \neq \text{مقدار تابع = حد راست}}$ گوئیم تابع پیوستگی راست دارد.

د) هرگاه $\boxed{\text{حد راست} \neq \text{مقدار تابع = حد چپ}}$ گوئیم تابع پیوستگی چپ دارد.

تست (۱۸): با توجه به نمودار تابع رو به رو، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^+} F(x)-۳\lim\limits_{x\to ۳^-} F(x)+F(۳)$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۲ ✓

ج) ۱ د) ۱-

جواب:

$$\lim_{x\to ۳^+} F(x)=۲$$

$$\lim_{x\to ۳^-} F(x)=۱$$

$$F(۳)=۳$$

$$۲-۳(۱)+۳=۲$$

نکته (۱۹): منظور از عبارت $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}$ **همان** $F'(a)$ **می‌باشد.**

تست (۱۹): اگر $F(x)=x^۳+۲x$ باشد حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{F(۲+h)-F(۲)}{h}$ کدام است؟

الف) ۲ ب) ۴۲ ج) ۶ ✓ د) ۸

جواب: مسئله این است که این سوال از ما می‌خواهد از تابع مشتق بگیریم و در مشتق تابع به جای x مقدار ۲ قرار دهیم.

گزینه (ج) $F'(x)=۲x+۲\Rightarrow F'(۲)=۲(۲)+۲=۴+۲=۶$

نکته (۲۰): مشتق مضرب‌های ۴ توابع Sinx و Cosx برابر خود تابع می‌گردند.

تست (۲۰): مشتق هفتادم تابع $y=Sinx$ کدام است؟

الف) $Sinx$ ب) $-Sinx$ ✓ ج) $Cosx$ د) $-Cosx$

جواب: چون ۶۸ مضرب ۴ است لذا مشتق ۶۸ همان Sinx است.

$y'_{۶۸} = Sinx$

$y'_{۶۹} = Cosx$ گزینه (ب)

$y'_{۷۰} = -Sinx$

✍ نکته (۲۱): شیب خط مماس و شیب خط قائم برای بدست آوردن شیب خط مماس بر منحنی ابتدا از منحنی مشتق گرفته به جای xهای منحنی مقدار قرار می‌دهیم و از فرمول $\boxed{\text{شیب خط قائم} = \frac{-۱}{\text{شیب خط مماس}}}$ **مقدار شیب خط قائم را بدست می‌آوریم.**

تست (۲۱): شیب خط مماس بر منحنی $y = Cos^۲x$ در نقطه $x = ۳۰^\circ$ کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۳}$ ج) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د) $-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ✓

جواب: گزینه (د)، $y' = -۲SinxCosx = -۲\times\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ شیب مماس

✍ نکته (۲۲): معادله خط مماس و معادله خط قائم برای نوشتن معادله خط مختصات یک نقطه و شیب معادله لازم است برای معادله خط مماس شیب مماس و برای معادله خط قائم شیب قائم لازم است.

تست (۲۲): معادله خط قائم بر منحنی $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ در نقطه‌ای $x = ۱$ واقع بر منحنی کدام است؟

الف) $x - ۳y = ۴$ ✓ ب) $y + ۳x = ۲$ ج) $y = ۳x + ۱$ د) $۳y + x + ۲ = ۰$

جواب: ابتدا مختصات نقطه A را بدست می‌آوریم. $A\left|\begin{matrix}۱\\-۱\end{matrix}\right.$ سپس شیب خط مماس را بدست می‌آوریم و بعد به شیب قائم می‌رسیم.

$y' = ۳x^۲ - ۶x \Rightarrow$ شیب مماس $= -۳ \Rightarrow$ شیب قائم $= \frac{۱}{۳}$

$y - y_A = m(x - x_A)$

$\Rightarrow y + ۱ = \frac{۱}{۳}(x - ۱) \Rightarrow ۳y + ۳ = x - ۱ \Rightarrow ۳y - x + ۴ = ۰$ یا $x - ۳y = ۴$

✍ نکته (۲۳): به نکات زیر توجه کنید:

صعودی $\leftarrow$ $y' > ۰$

نزولی $\leftarrow$ $y' < ۰$

می نی مم یا ماکسیمم $\leftarrow$ $y' = 0$

اکسترمم $\leftarrow$ $y' = 0$

تقعر رو به بالا $\leftarrow$ $y'' > 0$

تقعر رو به پائین $\leftarrow$ $y'' < 0$

طول نقطه عطف $\leftarrow$ $y'' = 0$

تست (۲۳): به ازای کدام مقدار a تابع $y = ax^2 - 4x$ در نقطه x = ۱ صعود است.

جواب:

$$y' = 2ax - 4 \Rightarrow 2a(1) - 4 > 0$$
$$2a > 4 \Rightarrow a > 2$$

مثال ۱: به ازای کدام مقدار a تابع در نقطه x = ٤ دارای اکسترمم است؟

جواب: $y' = 2x - a \Rightarrow y'(4) = 0 \Rightarrow 8 - a = 0 \Rightarrow a = 8$

مثال ۲: به ازای کدام مقدار a تقعر تابع $y = x^3 - ax^2$ در نقطه x = ۱ رو به بالاست

جواب:

$$y' = 3x^2 - 2ax$$
$$y'' = 6x - 2a \Rightarrow y'' > 0 \Rightarrow 6(1) - 2a > 0 \Rightarrow -2a > -6$$

نکته (٢٤): طول نقطه عطف تابع $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ از فرمول $x = \frac{-b}{3a}$ بدست می‌آید و اگر همین مقدار را به جای xهای تابع قرار دهیم. عرض نقطه عطف بدست می‌آید.

تست (٢٤): طول و عرض نقطه عطف تابع $y = x^3 + 6x^2$ به ترتیب کدام است؟

الف) ۲ و ۸ ب) ۲- و ۱۶ ✓ ج)۲ و ۱۶ د) ۲- و ۸

جواب: گزینه (ب)

طول نقطه عطف $x = \frac{-b}{3a} = \frac{-6}{3(1)} = -2$

عرض نقطه عطف $= (-2)^3 + 6(-2)^2 = -8 + 24 = 16$

نکته (۲۵): مجموع و حاصلضرب طول‌های نقاط اکسترمم یا (مینیمم- ماکسیمم): اگر از تابع درجه ۳ مشتق بگیریم تابع درجه ۲ بدست می‌آید. ریشه همین معادله درجه ۲ ریشه‌های مشتق اول می‌باشند و می‌دانیم ریشه‌های مشتق اول همان طول‌های نقاط اکسترمم (می‌نی‌مم- ماکسیمم) تابع می‌باشند.

ازطرفی مجموع ریشه‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ **ازفرمول** $S=\frac{-b}{a}$ **و حاصلضرب ریشه‌ها از فرمول** $p=\frac{c}{a}$ **محاسبه می‌شود.**

تست (۲۵): اگر $x_۱$ و $x_۲$ طول‌های دو نقطه ماکزیمم و منیمم تابع $y=\frac{x+۲}{x^۲+۵}$ باشد. مقدار $x_۱+x_۲$ کدام است؟ (سراسری ۸۳)

الف) ۴- ✓ ب)۴ ج)۵- د)۵

جواب: گزینه (الف)،

$$y'=\frac{۱(x^۲+۵)-۲x(x+۲)}{(x^۲+۵)^۲}=\frac{x^۲+۵-۲x^۲-۴x}{(x^۲+۵)^۲}=۰\Rightarrow -x^۲-۴x+۵=۰$$

$$\Rightarrow S=\frac{-b}{a}=\frac{-(-۴)}{(-۱)}=\frac{۴}{-۱}=-۴$$

نکته (۲۶): اگرمساحت مستطیل را بدهد و محیط مستطیل را می‌نی‌مم (کمترین مقدار) بخواهند از فرمول زیر استفاده می‌کنیم.

$$۴\times\sqrt{\text{مساحت}}=\text{مینیمم محیط}$$

تست (۲۶): اگر مساحت مستطیل برابر ۳۶ باشد می‌نی‌مم محیط آن کدام است؟

الف) ۲۰ ب)۲۴ ✓ ج)۲۸ د)۴۰

جواب: گزینه (ب)، $\text{مینیمم محیط}=\sqrt{\text{مساحت}}\times ۴=\sqrt{۳۶}\times ۴=۶\times ۴=۲۴$

نکته (۲۷): اگر محیط مستطیل را بدهند و بیشترین مقدار مساحت را بخواهند از فرمول زیر بدست می‌آوریم.

$$\text{بیشترین مقدار مساحت}=\left(\frac{\text{محیط}}{۴}\right)^۲$$

تست (۲۷): اگر محیط مستطیلی ۴۰ باشد بیشترین مقدار مساحت آن کدام است؟

الف) ۸۰۰ ب)۱۰۰ ✓ ج)۶۰ د)۱۲۰

جواب: گزینه (ب)، $\text{بیشترین مقدار مساحت}=\left(\frac{۴۰}{۴}\right)^۲=۱۰^۲=۱۰۰$

نکته (۲۸): بیشترین مقدار حجم مکعب زمانی بدست می‌آید. که ابعاد آن مکعب با هم مساوی باشند. در صورتیکه یکی از ابعاد را مشخص کنند بایستی آن دو بعد دیگر با هم برابر باشند. و محیط یک وجه مکعب برابر $۴a$ می‌باشد.

مثال ۱: اگر مجموع ابعاد مکعب برابر ۳۰ باشد بیشترین مقدار حجم مکعب کدام است؟

جواب: $\text{بیشترین مقدار حجم}=۱۰\times۱۰\times۱۰=۱۰۰۰$

با توجه به اینکه ۳۰ = ارتفاع + عرض + طول و این ابعاد با هم برابر می‌باشند.

تست (۲۸): بلندی یک مکعب مستطیل ۲ برابر محیط قاعده آن است اگر مجموع هر سه بعد آن ۴۵ واحد باشد بیشترین حجم ممکن چند واحد مکعب است؟

الف) ۷۲۹ ✓ ب)۷۳۸ ج)۷۶۵ د)۸۵۵

جواب: گزینه (الف)

$$\left.\begin{array}{l} \text{طول} = a \\ \text{عرض} = a \\ \text{ارتفاع} = ۲(۴a) = ۸a \end{array}\right\} \Rightarrow a + a + ۸a = ۴۵ \quad (۴۵ = \text{ارتفاع + عرض + طول})$$

$$۱۰a = ۴۵ \Rightarrow a = ۴/۵$$

$\Rightarrow$ طول =۴/۵ عرض =۴/۵ ارتفاع $= ۸ \times ۴/۵ = ۳۶$

$\Rightarrow$ حجم $= ۴/۵ \times ۴/۵ \times ۳۶ = ۷۲۹$

نکته (۲۹): مقدار تقریبی

هیچگاه برای مقدار تقریبی از ماشین حساب استفاده نکنید چون ماشین حساب مقدار دقیق را بدست می‌دهد.

برای بدست آوردن مقدار تقریبی به قضیه زیر دقت کنید.

$$F(x+\Delta x) = F(x) + F'(x) \times \Delta x$$

مثال ۱: با استفاده از قضیه تقریب مقدار تقریبی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $\sqrt{۱۷} = \sqrt{۱۶+۱} = \sqrt{۱۶} + \frac{۱}{۲\sqrt{۱۶}} \times ۱ = ۴ + \frac{۱}{۸} = \frac{۳۳}{۸}$

ب) $\sqrt{۲۷} = \sqrt{۲۵+۲} = \sqrt{۲۵} + \frac{۱}{۲\sqrt{۲۵}} \times ۲ = ۵ + \frac{۱}{۵} = \frac{۲۶}{۵}$

ج) $\sqrt[۳]{۸+۲} = \sqrt[۳]{۸} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۸^۲}} = ۲ + \frac{۲}{۱۲} = ۲ + \frac{۱}{۶} = \frac{۱۳}{۶}$

د) $\sqrt[۳]{۳۰} = \sqrt[۳]{۲۷+۳} = \sqrt[۳]{۲۷} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{۲۷^۲}} \times ۳ = ۳ + \frac{۱}{۹} = \frac{۲۸}{۹}$

هـ) $tg۴۶ = tg(۴۵ + \frac{\pi}{۱۸۰}) = tg۴۵ + (۱ + tg^۲_{۴۵}) \times \frac{\pi}{۱۸۰} = ۱ + \frac{۲\pi}{۱۸۰} = ۱ + \frac{۲\pi}{۹۰}$

و) $Cos۶۲ = Cos(۶۰ + \frac{\pi}{۹۰}) = Cos۶۰ + (-Sin۶۰) \times \frac{\pi}{۹۰} = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{\pi}{۹۰} = \frac{۱}{۲} - \frac{\sqrt{۳}\pi}{۱۸۰}$

تقریب × مشتق عبارت + خود عبارت = مقدار تقریبی